Laboratorio di logica

Primo incontro

L’oggetto della logica

La definizione tradizionale ci dice che la logica è lo studio del ragionamento corretto in senso ampio. Più precisamente, l’oggetto della logica come disciplina è *l’inferenza,* che è un particolare tipo di relazione che sussiste fra delle proposizioni.
Alcune cose che hanno a che fare con il ragionamento non sono l’oggetto della logica: per esempio, la logica non si occupa del lato psicologico del ragionamento; del ragionatore; del contesto nel quale accade il ragionamento; del modo concreto nel quale un ragionamento viene espresso. La logica, quindi, si occupa del ragionamento in senso completamente astratto.

La logica come viene studiata oggi nelle facoltà di filosofia e matematica è lo studio di sistemi logici formali. Questi sistemi formali includono un linguaggio formale e alcune regole di inferenza (e ogni tanto anche degli assiomi). Possiamo pensare a questi sistemi formali come a dei modelli idealizzati del ragionamento corretto.

Per riassumere, la logica tratta del concetto di inferenza (o dimostrazione, o della relazione “segue da”), e questo viene analizzato tramite i sistemi logici formali. Vedremo più tardi cosa sono i sistemi logici formali.

Cos’è un’inferenza?

Come abbiamo menzionato, l’inferenza è una relazione fra proposizioni.
Ad esempio, diciamo che da queste due proposizioni:
Se non hai finito le verdure, allora non puoi prendere il dolce.
Non hai finito le verdure.
Possiamo inferire un’altra proposizione:
Non puoi prendere il dolce.

Ci occuperemo delle inferenze *deduttive*, che differiscono da quelle *induttive:*

Deduzione	Induzione
La verità delle premesse si «trasporta» sulla conclusione	Non conserva la verità delle premesse
La conclusione è più debole delle premesse	La conclusione è più forte delle premesse
Esempio: O esco, o rimango a casa. Non esco. Quindi, rimango a casa.	Esempio: Tutti i corvi che ho visto finora sono neri. Quindi, tutti i corvi sono neri.

Non tutte le espressioni di una lingua sono proposizioni; le proposizioni sono, per definizione, solamente quelle espressioni che hanno un valore di verità. Se una cosa non può essere vera o falsa, non è una proposizione.

Esempi di frasi che non sono proposizioni:
Evviva!
Quando inizia la lezione?
Se puoi, prendi del pane prima di tornare a casa.

Torniamo al nostro esempio:

Se non hai finito le verdure, allora non puoi prendere il dolce.
Non hai finito le verdure.
(Quindi) Non puoi prendere il dolce.

Le prime due proposizioni vengono chiamate *premesse*; non dobbiamo per forza averne due (possono essere molte di più, o anche una sola). L'ultima proposizione è la *conclusione*. Il tutto viene chiamato un argomento.
Quello che ci interessa è la risposta a questa domanda: **quand'è che una conclusione segue necessariamente dalle premesse?**

Possiamo dire con sicurezza che nel nostro esempio la conclusione segue dalle premesse. Ma perché? Non può avere nulla a che fare con l'attuale verità delle premesse, dato che non abbiamo modo di verificarla (non sappiamo chi sono i parlanti, né se hanno o non hanno mangiato le verdure). Come facciamo, allora, a sapere che la conclusione segue dalle premesse?

Prendiamo un altro classico esempio:

Se piove, allora le strade sono bagnate.
Piove.
(Quindi) Le strade sono bagnate.

Anche qui è chiaro che la conclusione segue dalle premesse. Possiamo notare che questo argomento ha una certa somiglianza al primo esempio che abbiamo usato: hanno entrambi la stessa ***forma.***

Se non hai finito le verdure, **allora** non puoi prendere il dolce.
Non hai finito le verdure.
(Quindi) Non puoi prendere il dolce.

Se piove, **allora** le strade sono bagnate.
Piove.
(Quindi) Le strade sono bagnate.

Se A, **allora** B.
A.
(Quindi) B.

Questo schema:

Se A, **allora** B.

A.
(Quindi) B.

È la rappresentazione della ***forma logica*** degli argomenti che abbiamo usato come esempi. Come potete notare, abbiamo isolato la struttura dell'argomento astraendo dai contenuti concreti.
La proprietà interessante (e utile!) di questo schema è che ogni volta che sostituiamo A e B con delle proposizioni in modo uniforme otterremo un argomento *corretto,* ovvero un argomento nel quale *la conclusione segue dalle premesse*. (Provate!)

Questo schema può essere inteso anche come una ***regola di inferenza****:*
Ogni volta che assumi »Se A, allora B» e «A», puoi concludere «B».
Questa importantissima regola di inferenza è nota come *modus (ponendo) ponens*.

Esistono molte altre regole di inferenza (e schemi corrispondenti), ma non possiamo elencarle adesso.
La conclusione, allora, segue dalle premesse puramente in virtù della loro forma. Se la conclusione segue dalle premesse, diciamo che l'argomento è **corretto**. La verità delle premesse e la correttezza dell'argomento sono cose distinte.

Per capire se una conclusione segue correttamente dalle premesse, basta rispondere a questa domanda: se le premesse fossero vere, la conclusione seguirebbe necessariamente? (oppure: è possibile che le premesse siano vere e la conclusione falsa?)
Il nesso fra verità e correttezza è questo: se le premesse sono vere e l'inferenza è corretta, allora la conclusione è necessariamente vera.

Un'altra caratteristica importante, conseguenza di ciò che abbiamo appena detto, è che se una conclusione è falsa, almeno una delle due seguenti frasi è vera:

1. Almeno una delle premesse è falsa;
2. La conclusione non segue dalle premesse.

Ricontrolliamo il nesso fra verità e correttezza analizzando degli argomenti semplici per i quali sappiamo i valori di verità delle premesse e delle conclusioni.

Esistono quattro casi possibili in base alla verità della conclusione e alla correttezza dell'argomento:

La cartella (1) è un disastro – la conclusione è falsa e non segue dalle premesse.

Nella cartella (2), la conclusione è falsa. Anche se è falsa, segue in modo corretto dalle premesse; se le premesse fossero vere, anche la conclusione lo sarebbe. Quindi, almeno una delle premesse deve essere falsa (e lo è).

Nella cartella (3), abbiamo tre proposizioni vere, ma non c'è nessuna inferenza.

Nella cartella (4), abbiamo un buon argomento: la conclusione è vera e segue dalle premesse.

Come abbiamo visto in precedenza, quando un argomento è corretto, è corretto in virtù della forma logica delle proposizioni che lo compongono e della regola di inferenza che giustifica il passaggio dalle premesse alla conclusione.

Se siamo in grado di determinare la forma logica delle proposizioni e conosciamo le regole di inferenza, possiamo:

- Determinare se un argomento è corretto;
- Trarre delle conseguenze da proposizioni che abbiamo assunto come vere.

Secondo incontro

La forma logica degli enunciati

Nella lezione scorsa abbiamo determinato che per analizzare il concetto di inferenza è fondamentale determinare la forma logica degli argomenti, e quindi degli enunciati che li compongono. Se vogliamo scoprire la forma di una qualunque cosa, dobbiamo riconoscere:

- Quali sono le sue **parti elementari**;
- **In che relazione** stanno fra di loro.

Logiche differenti prendono come "atomi" cose diverse (atomi nel senso di enti indivisibili ed elementari). Le logiche che menzioneremo sono la **logica proposizionale** e la **logica dei predicati** (spesso chiamata anche "logica del primo ordine").

Le "particelle elementari" della logica proposizionale sono le proposizioni atomiche; l'ultimo livello di analisi accessibile è la proposizione. La logica dei predicati, d'altra parte, rientra nella struttura delle proposizioni in maniera più profonda. Noi partiremo dalla logica proposizionale, dato che è più semplice di quella predicativa.

Le proposizioni atomiche sono quelle proposizioni che non contengono in sé nessun connettivo proposizionale (e quindi non possono essere analizzate più in profondo dal punto di vista della logica proposizionale). Sono tipicamente rappresentate con le lettere minuscole *p, q, r, s* etc. Le proposizioni atomiche possono essere connesse fra di loro con i connettivi proposizionali. Le proposizioni che, invece, contengono uno o più connettivi si chiamano **composte**.

I connettivi proposizionali sono 5: la negazione, la congiunzione, la disgiunzione, l'implicazione e l'equivalenza. Ogni connettivo proposizionale rappresenta un particolare tipo di relazione fra le proposizioni.
Ogni connettivo ha la sua corrispettiva traduzione nel linguaggio naturale. Vedremo che, come nelle traduzioni da linguaggio naturale a linguaggio naturale, bisogna sempre tener conto del significato; tradurre parola per parola non darà buoni risultati.

L'esercizio di trovare la forma logica degli enunciati assomiglierà molto a un esercizio di **traduzione**; nel nostro caso, la traduzione avverrà dall'italiano al linguaggio simbolico della logica proposizionale.

Ogni linguaggio ha un alfabeto. L'alfabeto della logica proposizionale è costituito interamente dalle lettere proposizionali (che rappresentano le proposizioni), i connettivi (che rappresentano relazioni fra le proposizioni) e le parentesi (che hanno un ruolo simile alla punteggiatura nell'italiano). Lo introdurremo più formalmente una volta analizzato il significato dei connettivi.

La congiunzione

La congiunzione ($\wedge$) è u connettivo proposizionale che viene tradotto come "e", ma anche come "ma", "sia… che…" ed altri. Le proposizioni che compongono una congiunzione si chiamano congiunti.

Prendiamo una congiunzione:

A: Maria mangia una mela e Piero mangia una pera.

I due congiunti che la compongono sono:

p = Maria mangia una mela.
q = Piero mangia una pera.

Possiamo, allora, rappresentare la forma di A in questo modo:

p e *q*.

$p \wedge q$.

(Le due proposizioni, *p* e *q*, non possono essere ulteriormente scomposte, dato che non contengono altri connettivi proposizionali).

Il connettivo “∧” ha un significato preciso, simile a quello di “e”; ci dice che A è vera se e solo se sia *p* che *q* sono vere. Detto diversamente, non è possibile che *p* e *q* siano vere senza che anche A sia vera; e A non può essere vera senza che *p* e *q* siano vere. Un'altra conseguenza è che se A è falsa, almeno una delle due proposizioni atomiche deve essere falsa.

Questo vuol dire che la verità della congiunzione intera, ovvero della proposizione composta A, dipende dalla verità degli elementi che la compongono. Più generalmente, per tutti i connettivi proposizionali, la verità delle proposizioni composte dipenderà dalla verità delle proposizioni atomiche che le compongono.

Un modo di rappresentare queste proprietà dei connettivi sono le tavole di verità. Le tabelle contengono tutte le possibili combinazioni dei valori di verità delle proposizioni atomiche (sotto p e q) e il corrispondente valore di verità della proposizione composta (sotto p∧q).

Congiunzione		
p	**q**	**p∧q**
Vero	Vero	Vero
Vero	Falso	Falso
Falso	Vero	Falso
Falso	Falso	Falso

Ogni riga della tabella può essere concepita come un mondo possibile; la prima riga è il mondo nel quale p e q sono entrambi veri, la seconda è il mondo nel quale p è vero e q è falso etc.

$p \wedge q$, quindi, è la forma logica dei seguenti enunciati:

- Luca cantava e Giovanni ballava.
- Maria ha dato l'esame di logica e quello di filosofia morale.
- Ho preso tutti gli ingredienti per la cena, ma ero troppo stanca per cucinare.
- Sia lei che sua sorella hanno visto il nuovo film di Tarantino.
- Apprezzo la bellezza dei serpenti, anche se ne ho paura.

ESERCIZIO: individuate le proposizioni atomiche.

$p \wedge q$ non è la forma logica dei seguenti enunciati, anche se contengono la parola "e":

- Alisa e Sara sono sorelle.
- Il nucleo familiare di Francesco ha redditi e/o patrimoni in Italia.

ESERCIZIO: spiegate perché le due proposizioni non cono congiunzioni.

La disgiunzione

La disgiunzione ($\vee$) viene tradotta come "o", "oppure". Viene anche chiamata disgiunzione inclusiva, per differenziarla da quella esclusiva. Le proposizioni che la compongono si chiamano disgiunti.

Prendiamo una disgiunzione:

B: Luca o Maria verranno ad aiutarci.

Questa proposizione contiene i due disgiunti:

p = Luca verrà ad aiutarci.

q = Maria verrà ad aiutarci.

La forma logica di B è questa:

$p \vee q$

Il significato di "$\vee$" è simile a quello di "o": $p \vee q$ è vera se e solo se p e q non sono entrambe

false. In altre parole, è vera se almeno uno dei disgiunti è vero. Nel nostro esempio, "Luca o Maria verranno ad aiutarci", l'enunciato risulta falso solamente se né Luca né Maria verranno ad aiutarci. Non risulta falso se sia Maria che Luca vengono ad aiutarci!

Attenzione: il significato di "$\vee$" va contrastato con un altro tipo di disgiunzione, quella esclusiva:

C: Puoi prendere un primo o (puoi prendere) un secondo.

La forma logica di C non è la stessa di quella di B, proprio perché non può essere vera se entrambi i disgiunti sono veri. Bisogna fare attenzione alle condizioni di verità dell'enunciato per scoprire la sua forma logica; nel caso di C, possiamo intuire che si sta parlando di un menù fisso e che il significato della frase è questo: almeno uno, ma non entrambi. È raro che la disgiunzione esclusiva sia inclusa nel vocabolario della logica proposizionale.

La disgiunzione inclusiva è rappresentata da questa tavola di verità:

Disgiunzione		
p	**q**	**p$\vee$q**
Vero	Vero	Vero

Vero	Falso	Vero
Falso	Vero	Vero
Falso	Falso	Falso

$p \vee q$, quindi, è la forma logica dei seguenti enunciati:

- Puoi aggiungere dello zucchero o del latte.
- Questo arrosto è o troppo cotto o troppo salato.
- Marco è nato negli Stati Uniti o ha sposato una persona cittadina degli Stati Uniti. (Immaginiamo che Marco abbia un passaporto statunitense)

(ESERCIZIO: quali sono le proposizioni atomiche?)

La negazione

La negazione ($\neg$), a differenza dai primi due connettivi che abbiamo introdotto, è un connettivo *unario*: opera su una proposizione. Nel linguaggio naturale viene spesso espressa con “Non”, “Non è che”, “Non è il caso che”. Ad esempio, la traduzione di D:

D: Non ho letto il tuo messaggio.

È composta dalla proposizione atomica p:

p = Ho letto il tuo messaggio.

E dal connettivo “$\neg$”.
Quindi, la forma logica di D è “$\neg p$”.

La tavola di verità della negazione è più semplice, dato che abbiamo solo due casi possibili:

Negazione	
p	**¬p**
Vero	Falso
Falso	Vero

Il significato della negazione è questo: una negazione (un enunciato negato) è vera se e solo se l’enunciato che la compone è falso.
Quindi, “Non ho letto il tuo messaggio” sarà vera se “Ho letto il tuo messaggio” è falsa. Se invece sto mentendo e “Non ho letto il tuo messaggio” è falsa, “Ho letto il tuo messaggio” sarà vera.

$\neg p$, quindi, sarà la forma logica dei seguenti enunciati:

Non mi ricordo il tuo nome.
Irene non ama le sorprese.

Chiaramente, la traduzione degli enunciati del linguaggio naturale può risultare anche più complessa che nei casi che abbiamo incontrato finora. Ad esempio, l’enunciato:

F: Davide e Enrico non sono entrambi vestiti da pagliacci.

Va tradotto come:

$\neg(p \wedge q)$

Dove:
p: Davide è vestito da pagliaccio
q: Enrico è vestito da pagliaccio.

Le parentesi sono importanti e cambiano il significato della proposizione. La stessa proposizione senza parentesi:
$\neg p \wedge q$

È la traduzione di “Davide non è vestito da pagliaccio, mentre Enrico lo è”; è chiaro che questo enunciato ha un significato diverso rispetto a F.

ESERCIZIO: Trova la forma logica dei seguenti enunciati.

1. Martina è andata al cinema, ma Giulia non è uscita con lei.
2. Martina e Giulia sono amiche.
3. Martina o Giulia ci aiuteranno con l’evento di domani.
4. Almeno una delle mie tre amiche Martina, Giulia e Cristina abita a Parma.
5. ci vediamo domani, o non ci vedremo fino alla fine dell’estate.
6. Volevamo fare un aperitivo e poi chiamare Martina o andare direttamente in pizzeria.
7. Luca non mangia né le noci, né i pistacchi.

ESERCIZIO:

Trova un enunciato corrispondente del linguaggio naturale.

1. $p \lor \neg p$
2. $p \land q \land r$
3. $\neg(p \lor q)$
4. p
5. $\neg\neg p$

Terzo incontro

Teoria degli insiemi 1

Concetti base

La teoria degli insiemi *ingenua* (e quindi non assiomatica) tratta in modo intuitivo degli insiemi, ovvero delle collezioni di cose, e della relazione di appartenenza a tali collezioni.

Gli insiemi sono collezioni ben definite di oggetti. Non importa il tipo di oggetto - numeri, persone, atomi, altri insiemi – cose di qualunque genere possono fare parte di un insieme.

Le cose che sono parte di un insieme si chiamano *elementi* dell'insieme. Gli insiemi vengono rappresentati con due parentesi graffe che racchiudono gli elementi dell'insieme, divisi da virgole: $\{Sena\}$ è l'insieme dei miei animali domestici (ne ho solo uno). Possiamo anche dire che Sena *appartiene*, o è *un membro* dell'insieme dei miei animali domestici. Se vogliamo, possiamo anche dare un nome a questo insieme, ad esempio:

S = $\{Sena\}$.

Gli elementi all'interno dell'insieme non sono ordinati: $\{Fido,\ Felix\}$ non è diverso da $\{Felix,\ Fido\}$.

Gli elementi che si ripetono non sono nuovi elementi; $\{Fido,\ Felix\}$ non è diverso da $\{Fido,\ Felix,\ Fido,\ Fido\}$.

Abbiamo detto che gli insiemi sono collezioni *ben definite* di oggetti. Esistono due modi di definire(creare) un insieme: per enumerazione e determinando le condizioni di appartenenza.

Definire un insieme per enumerazione vuol dire elencare tutti i suoi elementi. Per esempio, elencando le vocali V=$\{a,\ e,\ i, o, u\}$, ho definito un insieme.
Definire un insieme determinando la condizioni di appartenenza vuol dire creare una collezione di oggetti in base a una determinata *proprietà* di questi oggetti. Per esempio, se decidiamo di definire l'insieme delle vocali della lingua italiana, lo possiamo rappresentare così:

L = $\{x: x$ è $una\ vocale\ della\ lingua\ italiana\}$

dove x è una variabile che può stare per qualunque cosa; in tal modo abbiamo definito in modo preciso un insieme. Nel nostro caso, la proprietà rilevante è «essere una vocale della lingua italiana»; se un oggetto ha questa proprietà, apparterrà all'insieme L.

L = $\{x: x$ è $una\ vocale\ della\ lingua\ italiana\}$ si legge come «L è l'insieme delle x tali che x sono vocali della lingua italiana».

Due insiemi sono uguali se hanno esattamente gli stessi elementi. Quindi, $\{a,\ e,\ i, o, u\}$ e $\{x\text{: } x \text{ è } una\ vocale\ della\ lingua\ italiana\}$ sono lo stesso insieme, anche se l'abbiamo definito in due modi diversi.

Ogni tanto sarà utile precisare quali tipi do oggetti stiamo prendendo in considerazione. Ad esempio, se vogliamo definire l'insieme di tutti i numeri primi, possiamo comodamente cercare solo fra gli oggetti che sono numeri naturali, dato che sappiamo già che è impossibile trovare un numero primo fra i mammiferi o i numeri irrazionali:

$$\{x \in \mathbb{N}\text{: } x \text{ è } divisibile\ solo\ con\ 1\ e\ s\text{è}\ stesso\}$$

Che si legge «L'insieme dei numeri naturali x tali che x sono divisibili solo con 1 e con sé stessi».

La relazione di appartenenza si scrive usando il simbolo $\in$, che si legge «…appartiene a…». Quindi, per dire che *a* appartiene all'insieme delle vocali italiane, scriveremo

$a \in \{x\text{: } x \text{ è } una\ vocale\ della\ lingua\ italiana\}$;

$a \in$ V; (dato che abbiamo dato il nome «V» a questo insieme)

$a \in \{a,\ e,\ i, o, u\}$;

Oppure, per dire che un oggetto *non appartiene* a un insieme, scriveremo

$a \notin \{x\text{: } x \text{ è } una\ consonante\ della\ lingua\ italiana\}$;

$a \notin \{1,2,3\}$.

A questo punto possiamo definire un concetto centrale: la relazione di *inclusione fra insiemi* (…è sottoinsieme di…). Un insieme A è incluso nell'insieme B sse tutti i membri di A sono anche membri di B:

$$A \subseteq B\ se\ e\ solo\ se\ \forall x\text{: } x \in A \rightarrow x \in B$$

(Si può definire anche la relazione di sovrainsieme $\supseteq$ in modo analogo.)

Attenzione! A è incluso in B, ma non deve per forza essere membro di B.

Come potete notare, $A \subseteq B$ anche se A e B hanno tutti gli stessi elementi. Questa caratteristica della relazione di inclusione può essere usata per definire l'uguaglianza fra insiemi in un altro modo:

$$A = B \; se \; e \; solo \; se \; A \subseteq B \; \wedge \; B \subseteq A$$

Un altro concetto fondamentale della teoria degli insiemi è l'insieme vuoto $\{\quad\}$, spesso denotato anche con il simbolo $\emptyset$. L'insieme vuoto è un insieme senza elementi; possiamo definirlo come

$$\{x: x \neq x\}$$

Esso è sottoinsieme di tutti gli insiemi, incluso sé stesso.

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme si chiama *insieme delle parti*. L'insieme delle parti di A $= \{a, b\}$ P(A) sarà:

P(A) $= \big\{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\big\}$.

Le coppie ordinate

Il concetto di coppie ordinate e di prodotto cartesiano di due insiemi è necessario per definire in modo rigoroso sia il concetto di relazione che quello di funzione.
Una *coppia ordinata* è una collezione di due oggetti che hanno un ordine preciso:

$$\langle primo,\ secondo \rangle$$

Dato che l'ordine nel quale appaiono gli elementi è importante,

$\langle primo,\ secondo \rangle \neq \langle secondo,\ primo \rangle$

Il prodotto cartesiano

Il *prodotto cartesiano* A×B di due insiemi A e B è un insieme che contiene tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento è un membro di A e il secondo elemento è un membro di B. Scritto formalmente,

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A \wedge b \in B\}$$

Esempi:

Dati gli insiemi $S = \{1,2,3\}$, $R = \{a, b\}$, T= $\{Fido\}$:

$S \times R = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$

$R \times R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

$T \times S = \{\langle Fido,\ 1\rangle, \langle Fido,\ 2\rangle, \langle Fido,\ 3\rangle\}$

$S \times T = \{\langle 1,\ Fido\rangle, \langle 2,\ Fido\rangle, \langle 3,\ Fido\rangle\}$

Perché ci interessa il prodotto cartesiano?

Perché ogni relazione può essere definita come un sottoinsieme del prodotto cartesiano di due o più insiemi. Ad esempio, prendiamo la relazione binaria R «è più piccolo di». Questa relazione può essere interpretata in modi diversi in base a quali insiemi di oggetti vogliamo mettere in relazione. Gli insiemi di oggetti che vogliamo mettere in relazione si chiamano *dominio e codominio*, dove gli elementi del dominio saranno al primo posto della coppia ordinata e gli elementi del codominio saranno al secondo posto della coppia ordinata.

Prendiamo l'insieme $A = \{1,3,5\}$ come dominio e $B = \{2,9\}$ come codominio. La relazione $R \subseteq A \times B$.

$$A \times B = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,9\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,9\rangle\}$$

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,9\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 5,9\rangle\}$$

La relazione R definita sui due insiemi è esattamente questo insieme di coppie ordinate. Se ci chiediamo se due cose stanno in relazione R fra di loro, basta vedere se esiste la corrispondente coppia ordinata nell'insieme R. Per esempio, 2 non sta in relazione R con 3, dato che non abbiamo la coppia ordinata $\langle 2,3\rangle$ nell'insieme R.

L’esempio precedente non corrisponde con nessun uso naturale della frase «…più piccolo di…». Un’interpretazione più appropriata userebbe i numeri naturali come dominio e codominio:

$$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Precisamente, per i numeri naturali, la relazione «…più piccolo di…» è l’insieme definito in questo modo:

$$R = \{\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon a < b\}$$

Quindi, prendendo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\langle 1,1 \rangle \langle 1,2 \rangle \langle 2,1 \rangle \langle 2,2 \rangle \ldots \langle 30187,\ 1 \rangle \ldots \langle 2818726,\ 621526111 \rangle \ldots\}$$

R sarà esattamente l’insieme di tutte le coppie ordinate dove il primo elemento è più piccolo del secondo.

Le funzioni

Le funzioni, invece, sono un particolare tipo di relazione: sono quelle relazioni che hanno esattamente un elemento del codominio associato a ogni elemento del dominio.
Quindi, come le relazioni, saranno un sottoinsieme del prodotto cartesiano del dominio e del codominio; ma nelle coppie ordinate non ci sarà mai una «doppia» al primo posto; e dovranno esserci tutti gli elementi del dominio (non deve mancarne neanche uno).
Ad esempio, la relazione «è più piccolo di» (da numeri naturali a numeri naturali) non è una funzione, perché ogni numero naturale è più piccolo di più di un altro numero. Per esempio, il 3 è più piccolo del 4, e del 5, e del 6…; quindi la relazione include le coppie ordinate $\langle 3,4 \rangle$ e $\langle 3,5 \rangle$ (e così via).

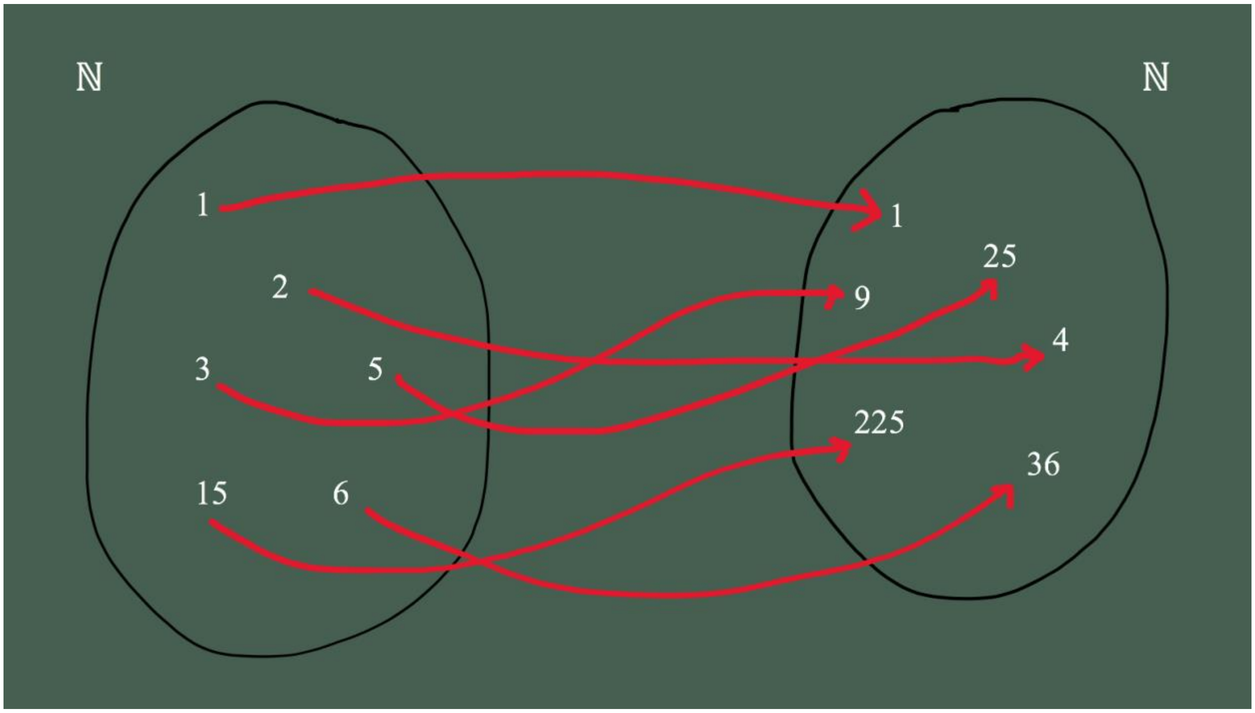
Molte altre relazioni, invece, sono anche funzioni; ad esempio, x^2 è una funzione, e il prezzo della frutta che ho comprato è una funzione del suo peso.

Proviamo a ragionare su questi due esempi.

x^2è una funzione da numeri a numeri; mette in relazione due numeri. Se prendiamo come dominio e codominio i numeri naturali, possiamo rappresentare la relazione in questo modo:

$$x^2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,9\rangle \langle 4,16\rangle, \langle 5,25\rangle \dots \langle 25,625\rangle \dots \langle 112,12544\rangle \dots \}$$

Come potete intuire, avremo sicuramente tutti i numeri naturali al primo posto (dato che possiamo calcolare il quadrato di ogni numero naturale); e non avremo mai lo stesso numero naturale al primo posto più di una volta (dato che ogni quadrato di un numero naturale è unico.)



Un altro modo di visualizzare le funzioni è immaginarle come delle *macchine* che possono accettare degli *input* e che producono *output.* Ovviamente stiamo parlando di macchine immaginarie precise, e che quindi non danno mai risultati diversi per lo stesso input.
Il caso della funzione x^2 è immaginabile come una *macchina quadratrice* che, ogni volta che le diamo in pasto un numero naturale, butta fuori il suo quadrato come output.

Torniamo invece all'esempio della frutta. Avevamo detto che il prezzo della frutta è una funzione del suo peso. Questo vuol dire che esiste una funzione F, precisamente il prezzo del prodotto al kg, che mette in relazione due insiemi: un insieme di numeri che rappresentano il peso della frutta (pesi) e un insieme di numeri che rappresentano il prezzo della frutta (prezzi).
Quindi,

$$F \subseteq Pesi \times Prezzi$$

Dove per ogni peso abbiamo esattamente un prezzo (questo la rende una funzione). Immaginiamo che la frutta costi 2 euro al kg. In quel caso, se ci limitiamo a due posti decimali,

$$F = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0.01,\ 0.02\rangle, \langle 0.02,\ 0.04\rangle, \langle 0.03,0.06\rangle \ldots \langle 2.3,\ 4.6\rangle \ldots \langle 150.1,300.2\rangle \ldots\}$$

La macchina che rappresenta la funzione è ancora più facile da immaginare in questo caso; è una macchina che, una volta che le diamo come input il peso della frutta, produce come output il prezzo della frutta. (Questa macchina esiste in modo concreto in tutti i supermercati.)

I predicati

Un tipo di funzioni particolarmente interessanti per noi sono i *predicati.* I predicati sono funzioni che hanno come codominio i valori di verità. Questo vuol semplicemente dire che gli output saranno sempre e solo valori di verità. I predicati possono essere 0-ari, 1-ari, 2-ari etc.
Per esempio, il predicato 1-ario P «essere un filosofo», datogli l'input «Platone» produrrà l'output «vero» (o 1); se gli diamo l'input «Parma» darà l'output «falso» (o 0). Il predicato binario «essere sorella di», datogli in pasto l'input «Sara, Alisa» produrrà l'output «vero».

Quel che abbiamo detto vale anche per predicati che non hanno nulla a che fare con la matematica e con domini composti anche da oggetti non-matematici; per esempio, «essere più alto di 1.65m» sul dominio di tutti gli esseri umani è un predicato vero e proprio, come lo sono anche «essere una bottiglia di vino» sul dominio di tutto ciò che esiste, o «essere una cosa scaduta» sul dominio del contenuto del mio frigo in questo momento.

Per riassumere,

- Le relazioni binarie sono sottoinsiemi del prodotto cartesiano del loro dominio e codominio, ovvero un insieme ben preciso di coppie ordinate;
- Le funzioni sono relazioni che danno un unico output per ogni elemento del dominio;
- I predicati sono funzioni che hanno come codominio i valori di verità.

Quarto incontro

Teoria degli insiemi 2

L'ultima volta abbiamo introdotto alcune nozioni base della teoria degli insiemi:
Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti, chiamati elementi. Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi. Esiste anche un insieme senza elementi, chiamato l'insieme vuoto.
L'appartenenza - $\in$ - che è la relazione fra un elemento dell'insieme e l'insieme al quale appartiene; è una nozione che prendiamo come primitiva.

Per esempio, dato l'insieme M:$\{sara,\ \{1,2,3\}\}$, possiamo dire che
$sara \in$ M,

$$\{1,2,3\} \in \mathrm{M}$$

Ma non che $1 \in$ M, e non che $\{sara\} \in$ M.

(Perché questo sia vero, dovremmo estendere il nostro insieme in questo modo: $\{sara,\ \{1,2,3\},\ 1,\ \{sara\}\}$. Non si tratta di elementi "doppi"; $sara \neq \{sara\}$, visto che il primo elemento è una persona e il secondo è un insieme).

La relazione “essere sottoinsieme di”, scritta $\subseteq$, sussiste fra due insiemi se tutti gli elementi del primo sono anche elementi del secondo. Quindi, l’insieme N:$\{sara\}$ è un sottoinsieme di M, dato che tutti i suoi elementi (io) sono anche elementi di M. Quindi, possiamo dire

$$N \subseteq M$$

Ma non $M \subseteq N$, visto che uno degli elementi di M non è in N (l’elemento $\{1,2,3\}$).

ESERCIZIO:
In quali delle seguenti relazioni $-A = B,\ A \subseteq B,\ A \in B-$ stanno gli insiemi elencati?

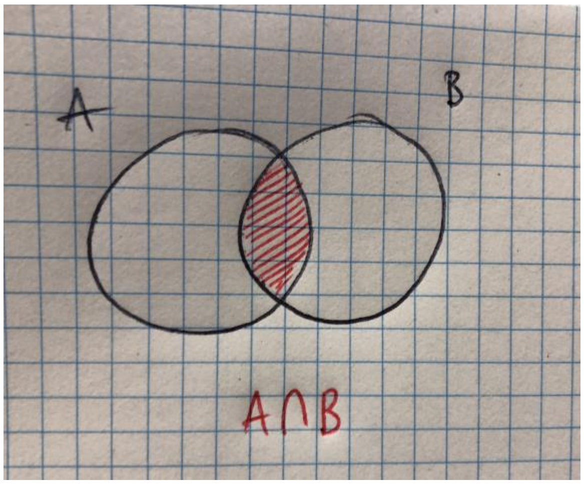
1. $A: l'insieme\ dei\ numeri\ interi\ positivi,\ B: l'insieme\ dei\ numeri\ interi$
2. $A: \{1\},\ B: \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
3. $A: l'insieme\ dei\ numeri\ primi\ più\ piccoli\ di\ 10,\ B: \{2,3,5,7\}$
4. $A: \{Sara\},\ B: l'insieme\ dei\ mammiferi$
5. $A: \{Sara\},\ B: \{\{Sara\}, \{Alisa\}, \{Sena\}\}$
6. $A: \{Sara\},\ B: \{Sara\}$

Le operazioni fra gli insiemi

Dati due insiemi A e B, possiamo definire alcune operazioni fra questi insiemi.
Le operazioni ci daranno sempre un altro insieme come risultato (un po’ come le operazioni aritmetiche, dove con un’operazione fra numeri otteniamo altri numeri).

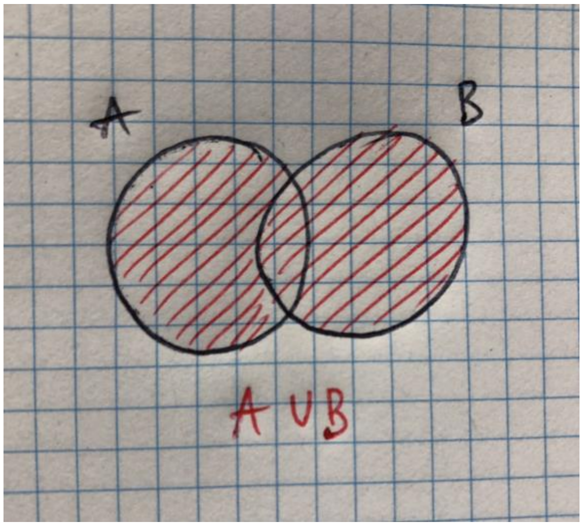
L'intersezione $A \cap B$ indica quell'insieme composto da tutti gli elementi in A che si trovano anche in B. Formalmente,

$$x: x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$



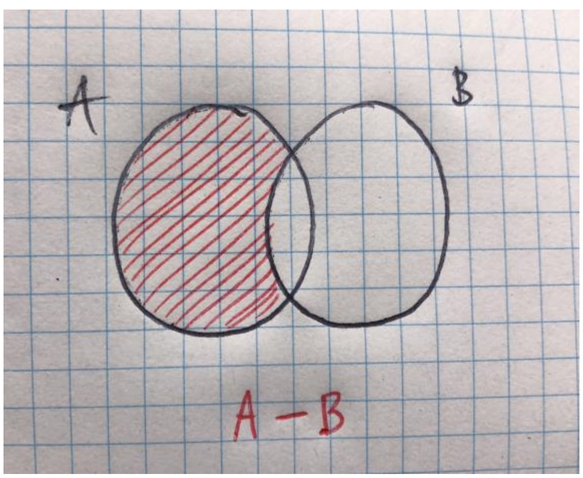
L'unione $A \cup B$ indica quell'insieme composto da tutti gli elementi che si trovano in A o in B. Formalmente,

$$x: x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



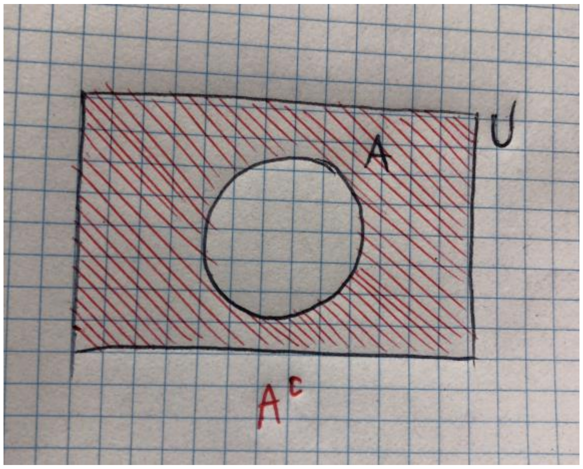
La differenza $A - B$ indica l'insieme composto dagli elementi che si trovano in A ma non in B. Formalmente,

$$x: x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$



Il complemento A_c di un insieme relativamente all'insieme universo U è tutto ciò che non sta in A ma sta in U, ed è uguale a $U - A$. Formalmente,

$$x: x \in A^c \leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A$$



ESERCIZIO:

Se U:$\{1,2,3,4,5\}$, $A: \{1,2\}$ e $B: \{2,3\}$, calcola:

1. A^c
2. B^c
3. $A^c \cup B^c$
4. $(A \cup B)^c$
5. $A^c - B$
6. $A - B^c$
7. $A^c - B^c$

Come potete vedere, esiste una sorta di isomorfismo fra i connettivi logici e le relazioni fra insiemi che abbiamo definito.

L’unione è isomorfa alla disgiunzione, l’intersezione alla congiunzione e il complemento alla negazione. In aggiunta, l’inclusione è isomorfa all’implicazione e l’uguaglianza fra insiemi all’equivalenza. Tutto questo è chiaramente visibile dalle definizioni formali che abbiamo esposto.

Il Paradosso di Russell

La scoperta del paradosso di Russell all’inizio del ‘900 fu uno degli eventi più importanti della storia della logica e fece scattare la cosiddetta crisi dei fondamenti della matematica.
Il paradosso è conseguenza di una parte fondamentale della teoria degli insiemi naïve, ovvero quella che determina come possono essere descritti (o creati) gli insiemi.

Molti dei più grandi logici e matematici della fine del 1800, inclusi Frege, Peano, Boole e Dedekind, avevano dedicato una grande parte del loro lavoro a un tentativo di trovare un fondamento rigoroso e assiomatico della matematica usando solamente gli strumenti della logica simbolica. In poche parole, questi logici volevano ridurre la matematica alla logica in modo rigoroso. Tutto questo venne messo in dubbio dopo la scoperta del paradosso.

Come abbiamo già menzionato, gli insiemi possono essere definiti in due modi: elencando i membri dell’insieme oppure definendo una proprietà che devono avere tutti i membri dell’insieme, come per esempio:

B: l’insieme di tutti i giochi di ruolo $\{x: x \text{ è } \mathit{un\ gioco\ di\ ruolo}\}$

L’insieme B, dato come insieme universo quello che contiene tutti gli oggetti del nostro mondo, avrà come elementi tutti i giochi di ruolo. Questo insieme si può chiamare anche l’estensione del predicato “essere un gioco di ruolo”. Questo modo di creare insiemi vale per tutte le proprietà.

Russell immaginò una particolare proprietà, ovvero la proprietà di appartenere a sé stesso. Un insieme può o appartenere, o non appartenere a sé stesso, e le estensioni di questi due predicati dovrebbero essere ben definite. Questa è una proprietà un po’ strana, ma possiamo chiarire il suo significato usando degli esempi: l’insieme di tutte le persone in questa stanza non appartiene a sé stesso, chiaramente, dato che i suoi membri sono persone e non insiemi.

Per il contrario, ovvero per la proprietà di appartenere a sé stesso, è un po’ più difficile trovare degli esempi, ma non è certamente impossibile. Per esempio, prendendo la proprietà “le cose che non sono un cavallo”, possiamo definire un insieme di tutte le cose che non sono cavalli; e questo insieme dovrà per forza appartenere a sé stesso, dato che non è un cavallo ma un insieme.

Adesso proviamo a immaginare un insieme che contiene tutti gli insiemi che NON appartengono a sé stessi; e quindi conterrà l’insieme dei numeri naturali, l’insieme di tutti i nomi femminili, l’insieme dei cavalli neri etc.
La domanda che Russell si pone a questo punto è: questo nuovo insieme appartiene o non appartiene a sé stesso?

Se appartiene a sé stesso, allora non può rientrare fra i suoi membri, dato che i suoi membri sono esclusivamente insiemi che NON appartengono a sé stessi;
Ma se non appartiene a sé stesso (e quindi non lo possiamo trovare fra i suoi membri), è un insieme che, per definizione, dovrebbe essere dentro all’insieme degli insiemi che non appartengono a sé stessi. Ma non può sia avere che non avere una stessa proprietà – sarebbe contraddittorio.

Questa contraddizione, purtroppo, significa o che la nostra teoria degli insiemi (e quindi almeno uno dei suoi presupposti) è inconsistente.
Il punto debole della teoria è la regola che ci permette di creare un insieme data una qualunque proprietà. La prima reazione a questo problema era di limitare le possibilità di costruire un insieme definendolo tramite una qualunque proprietà. Il risultato è stato lo sviluppo della teoria dei tipi, una logica alternativa che funge da fondamento della matematica al posto della teoria degli insiemi, e che include una gerarchia di tipi di entità e restringe quali operazioni possono essere applicate su ogni tipo.

Non esiste un’unica e definitiva soluzione per il paradosso; esistono più soluzioni alternative, ma non un consenso generale su quale sia, di fatto, il fondamento della matematica.

Quinto incontro

La logica del primo ordine 1

La logica del primo ordine, chiamata anche logica dei predicati, ci permette di “analizzare” gli enunciati del linguaggio naturale più in profondo rispetto alla logica proposizionale.
Ricordiamoci che gli elementi fondamentali della logica proposizionale erano le proposizioni atomiche, che possiamo interpretare (tradurre) come degli enunciati semplici portatori di un valore di verità, e i connettivi logici, che ci permettono di comporre proposizioni complesse. Il valore di verità di una proposizione complessa è sempre determinato dai valori di verità delle sue parti e dalla sua forma logica. Il metodo, quindi, per trovare la forma logica degli enunciati con lo strumento della logica proposizionale è di individuare i connettivi proposizionali e le proposizioni atomiche.

La forma logica degli enunciati ci permette di controllare la validità di un argomento che li include (come premesse e conclusioni).
La logica proposizionale e il livello di analisi della forma logica che ci offre non è sufficiente per l’analisi di tutti gli argomenti che consideriamo corretti. Per esempio,

Ogni uomo è mortale.
Socrate è un uomo.
____
Socrate è mortale.

È un argomento evidentemente corretto; ma nessuno degli enunciati che lo compongono non contiene nessun connettivo proposizionale, ed è quindi traducibile solamente così:

p.
q.
___
r.

Queste tre proposizioni non formano un argomento valido dal punto di vista della logica proposizionale. Abbiamo, quindi, bisogno di strumenti diversi per comprendere la validità di questo argomento.

Potreste dire che basterebbe l'uso della logica categoriale aristotelica che abbiamo menzionato durante i laboratori di teoria dell'argomentazione, ma esistono molti casi per i quali non è sufficiente:

Ogni uomo è un mammifero.

Chiunque ama un uomo, ama un mammifero.

Noi ci concentreremo sulla forma degli enunciati, e quindi sul processo di traduzione del linguaggio naturale a quello formale, e meno sulle regole di inferenza.
Per tradurre una qualunque frase, dobbiamo conoscere bene *il significato* di tutte le parole che usiamo sia in uno che nell'altro linguaggio. Quindi, partiremo da una spiegazione intuitiva della semantica dei linguaggi del primo ordine.

Elementi fondamentali

La logica del primo ordine ha dei nuovi elementi fondamentali che ci permettono di rientrare nella struttura degli enunciati in maniera più dettagliata; più precisamente, ci permetteranno di parlare di **proprietà di oggetti** che rientrano nel nostro "universo del discorso".
Gli "atomi" non saranno più le proposizioni, ma i termini (vedremo più tardi cosa sono) e i predicati (che, usando le regole della sintassi, possono comporre degli enunciati).
Useremo tutti i connettivi che abbiamo già menzionato, ma in più abbiamo dei nuovi strumenti: i quantificatori, per i quali usiamo i simboli $\exists$ e $\forall$, e l'uguaglianza fra gli oggetti, per la quale usiamo il simbolo =.

L’universo della logica proposizionale era molto povero; le proposizioni stavano solamente per dei valori di verità e nient’altro. L’universo della logica dei predicati può essere molto più vasto, e ci permetterà di parlare di oggetti che assumono certe proprietà o stanno in relazione fra di loro.

La logica del primo ordine ci permetterà di esprimere enunciati di questo tipo come aventi forme diverse:

- Sena è un cane.
- Sara ama Sena.
- Sena ama le carote.
- Esiste almeno un cane.
- Esistono esattamente 3 esseri umani.
- Nessun cane è un essere umano.
- Ogni essere umano felice ha un cane.

(questi enunciati, notate, verrebbero tutti tradotti come una semplice proposizione atomica nel linguaggio proposizionale.)

La semantica della logica dei predicati

Per dare un significato alle formule della logica dei predicati, dobbiamo prima di tutto definire di *cosa* stiamo parlando, ovvero a cosa si riferiscono i simboli che stiamo usando (l’universo del discorso).

L’universo del discorso è un insieme di oggetti dei quali vogliamo parlare. Questi oggetti possono avere certe proprietà e possono stare in relazione fra di loro in vari modi.

Immaginiamo, per esempio, che il nostro universo del discorso sia l’insieme di tutti i mammiferi. Questo insieme include come elementi il mio cane Sena, me stessa, tutte le persone in questa stanza e il gatto dei miei vicini, Felix, ma anche tutti gli altri mammiferi che esistono.

Perché stiamo parlando di insiemi di oggetti? Perché vogliamo parlare di predicati, e non avrebbe senso parlare di predicati (ovvero di proprietà) senza aver definito un dominio, ovvero un insieme sul quale sono definiti.

Ricordiamoci che i predicati sono un particolare tipo di funzione che, datole in pasto un qualunque elemento del dominio come input, ci dà come risposta esattamente un valore di verità. Quindi, il predicato C "essere un cane" definito sull'insieme dei mammiferi ci darà come risposta 1 se gli diamo come input il mio cane Sena e 0 se gli diamo in pasto il gatto dei miei vicini, Felix. In altre parole, nell'estensione del predicato troveremo Sena, il cane di mio cugino, tutti gli altri cani esistenti e nient'altro; rimarranno fuori il gatto Felix, tutte le singole mucche, tutti i singoli esseri umani etc.

Oltre a «è un cane», possiamo anche definire altre relazioni su questo insieme;
"è peloso", "è un unicorno", "ha un cuore" sono esempi di predicati a un posto, ovvero di predicati che hanno bisogno di un solo input;
"è più pesante di" e "ama" sono esempi di predicati a due posti, ovvero di predicati che hanno bisogno di una coppia ordinata come input. Per ogni elemento del nostro universo, o ricadrà nell'estensione delle relazioni a un posto che abbiamo definito, o no; e per le relazioni a due posti, lo stesso vale per ogni coppia ordinata.

Quindi, abbiamo un "universo" definito - un insieme di oggetti - e delle relazioni definite su questo insieme. Questi oggetti e queste relazioni sono esattamente le cose delle quali possiamo parlare (alle quali ci possiamo riferire) usando il linguaggio del primo ordine.

Per chiarire ulteriormente questa idea, la relazione fra il linguaggio formale e un dominio sarà come la relazione fra il linguaggio naturale e le cose alle quali si riferisce.
Quando dico (in italiano) "Elisa si è seduta al Dulcamara", possiamo distinguere *le parole che uso per esprimermi* e *ciò di cui voglio parlare*; della persona Elisa, dell'atto di sedersi in un posto, del locale di fronte all'università.

Per adesso, gli oggetti che stanno nell'insieme che abbiamo selezionato e le relazioni fra di loro non hanno *dei nomi*; ma possiamo darglieli assegnando a ciascun oggetto e a ciascuna relazione un simbolo. Questa specie di battesimo si chiama *interpretazione*.

Quindi,

- A ciascun oggetto dell'universo del discorso, assegneremo una *costante individuale*, tipicamente rappresentata con le lettere minuscole *a,b,c,d…*;
- A ciascuna relazione assegneremo un *simbolo predicativo*, tipicamente rappresentato con le lettere maiuscole *F, G, H…*
- Sia gli oggetti e le relazioni potranno avere più di un nome.

L'interpretazione del modello che abbiamo usato come esempio avrebbe questo aspetto:

$$\begin{array}{l} a \longmapsto \textit{Sena} \\ b \longmapsto \textit{Sara} \\ c \longmapsto \textit{Felix} \\ d \longmapsto \textit{mucca}_1 \\ e \longmapsto \textit{mucca}_2 \\ \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F \longmapsto \textit{è un cane} \\ G \longmapsto \textit{è peloso} \\ H \longmapsto \textit{è un unicorno} \\ P \longmapsto \textit{ha un cuore} \\ Q \longmapsto \textit{ama} \\ R \longmapsto \textit{è più pesante di} \end{array}$$

I simboli che abbiamo appena introdotto, insieme alle *variabili individuali,* i connettivi, i quantificatori e le parentesi, faranno parte del nostro alfabeto. Costruiremo tutte le frasi che vogliamo costruire usando questo alfabeto.
Adesso abbiamo un linguaggio che è sufficiente per tradurre, dall'italiano, le seguenti frasi:

1. Sena è un cane.
2. Sara non è un unicorno.
3. Sara ama Sena.
4. Sena non ama Felix.
5. Sena, Sara e Felix hanno un cuore.
6. Sara ama o Felix o Sena.

Le traduzioni saranno:

1. Fa.
2. –Hb.
3. bQa.
4. –aQc
5. Pa $\wedge$ Pb $\wedge$ Pc.
6. bQa $\vee$ bQc.

Tutte queste espressioni hanno un valore di verità e sono quindi *enunciati* (nella logica dei predicati, chiameremo così le formule che possono avere un valore di verità). Saranno vere se l'oggetto Sena è nell'estensione del predicato "essere un cane"; se Sara non è nell'estensione di "essere un unicorno"; etc.
(Come pensate che funzionerà per le espressioni che contengono i connettivi?)

ESERCIZIO:
Per tutte gli enunciati rimasti, determinate in quali condizioni saranno veri.

ESERCIZIO:
Usando il nostro piccolo vocabolario, traducete i seguenti enunciati in italiano:

1. eRd.
2. Gc $\wedge$ Pc.
3. cRa$\rightarrow$ bQc.

E spiegate in quale situazione saranno veri.

ESERCIZIO:
Prendendo come universo $U = \{Dulcamara, Marco, Anna, Fido\}$ definite le relazioni su di esso Essere amico di, Essere un cane, Amare, Essere una persona; fornite un'interpretazione; e in base a ciò traducete, nel linguaggio formale, le seguenti frasi:

1. Marco e Anna amano il Dulcamara.
2. Fido è amico di Marco e Anna.
3. Il Dulcamara è un cane.
4. Se Marco ama Fido, Anna ama Marco.

E controllate il loro valore di verità.

Sesto incontro

Logica dei predicati 2

La morfologia

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la semantica della logica dei predicati per avere un'idea di cosa sarà il riferimento dei simboli che useremo; e per capire che da questo riferimento dipenderà anche la verità delle frasi costruite nel linguaggio simbolico.
Questa volta impareremo a costruire frasi grammaticamente corrette nel linguaggio simbolico; in altre parole, impareremo le regole di formazione per le formule ben formate.

L'ultima volta abbiamo menzionato i termini come gli elementi fondamentali della logica dei predicati (assieme ai predicati), ma non abbiamo definito cosa sono. I termini saranno simboli che stanno per degli oggetti dell'universo del discorso.
Chiaramente, le costanti individuali $\{a, b, c, d...\}$ delle quali abbiamo parlato la volta scorsa saranno termini, dato che si riferivano a oggetti particolari.
Definiremo, però, anche un altro tipo di termine: le variabili individuali $\{x, y, z...\}$, che possono stare per qualunque oggetto del dominio.
Nessun'altra cosa sarà un termine.

Le variabili individuali funzionano un po' come le variabili che già conoscete, quelle usate nell'algebra. Una variabile indica un elemento non precisato di un insieme; può assumere più valori diversi; indica qualcosa di non-fissato, giustamente, *variabile.*
P(x) verrà letto come "x ha un cuore". Saranno indispensabili all'interno della logica dei predicati perché ci permetteranno di parlare di "tutte le cose" e "alcune cose".

Adesso possiamo finalmente passare alla quantificazione. Cos'è un quantificatore? È un operatore che ci dice che *qualcosa* vale *per un certo numero di oggetti nel dominio*.
I due quantificatori che si usano nella logica del primo ordine sono:
$\forall$, che esprime che qualcosa vale per **tutti** gli oggetti del dominio,
$\exists$, che esprime che qualcosa vale per **almeno un** oggetto del dominio.

Per parlare in modo non-specifico degli oggetti del dominio, useremo le *variabili,* che staranno per un qualunque elemento del dominio. Nell'algebra, le variabili stanno per dei numeri arbitrari; nella logica del primo ordine, staranno per un qualunque elemento dell'universo del discorso che abbiamo determinato (nel nostro caso, staranno per un qualunque mammifero; potrebbero anche essere numeri, avessimo definito l'universo del discorso in modo diverso).
Come in algebra, l'uso di più variabili diverse non ci garantisce che stanno per cose diverse. Sempre come in algebra, invece, l'uso della stessa variabile più volte potrà indicare che si tratta dello stesso oggetto arbitrariamente scelto dal dominio (ma non sempre; vedremo più tardi quali sono le limitazioni)

Con l'uso delle variabili, potremo esprimere delle frasi che significheranno "per ogni elemento del dominio, vale che…"
Per esempio, per scrivere che tutte le cose hanno un cuore, scriveremo
$\forall x(Px)$
Che può essere letto anche:

- Per *ogni* cosa che prendo dal dominio, quella cosa ha un cuore
- Per *qualunque* cosa che prendo dal dominio, quella cosa avrà un cuore
- *Tutto* ha un cuore
- Tutti gli elementi del dominio ricadono nell'estensione del predicato "ha un cuore"
- Per ogni x, x ha un cuore.
- Ogni cosa ha un cuore.

I simboli $\forall x$, da soli, vanno letti "per ogni x".
Intuitivamente, perché una quantificazione universale sia vera, deve essere vera per ogni singolo elemento del dominio che sostituiamo al posto di x.

Nel modello e nell'interpretazione che abbiamo definito, $\forall x(Px)$ è vera, visto che non esistono mammiferi senza un cuore.

In un certo senso, $\forall x(Px)$ non è diversa da una grande congiunzione che ci dice, per ogni cosa nell'universo:

$Pa \land Pb \land Pc \land Pd\ldots$

(Tradotto: Sena ha un cuore e Sara ha un cuore e Felix ha un cuore e $mucca_1$ ha un cuore…).

Come una congiunzione normale, sarà vera solo se tutti i congiunti sono veri; e quindi se per ogni singola cosa dell'insieme è vero che ha un cuore. Nel nostro linguaggio questo è il caso (dato che tutti i mammiferi hanno un cuore).

Similmente, possiamo usare il quantificatore esistenziale $\exists$ per esprimere che almeno uno degli oggetti del nostro dominio ha una proprietà, senza specificare quale. Per esempio, per scrivere che almeno una cosa è un unicorno, scriveremo

$\exists x(Hx)$

Che può essere letto anche:

- Per almeno una delle cose nel dominio, vale che è un unicorno
- Esiste un unicorno
- Almeno una cosa ricade nell'estensione del predicato "è un unicorno"
- Esiste una x tale che x è un unicorno.
- Qualcosa è un unicorno.
- Per almeno una x, x è un unicorno.

I simboli $\exists x$, da soli, vanno letti "Esiste un x".

Intuitivamente, perché una quantificazione esistenziale sia vera, deve essere vera per *almeno un* elemento che sostituiamo al posto di x.

Nel modello e nell'interpretazione che abbiamo definito, $\exists x(Hx)$ non è vera, visto che nessuno degli elementi dell'universo ha la proprietà di essere un unicorno.

$\exists x(Hx)$ non è diversa da una grande disgiunzione che dice, per ogni cosa dell'universo,

$Ha \lor Hb \lor Hc \lor Hd\ldots$

(Tradotto: Sena è un unicorno, o Sara è un unicorno, o Felix è un unicorno, o $mucca_1$ è un unicorno…). Come in una qualunque altra disgiunzione, anche questa è vera se almeno uno degli elementi è vero; e quindi basta che per una delle cose nel nostro dominio valga che sia un unicorno. Purtroppo, questo non è il caso, e la grande disgiunzione è di conseguenza falsa.

Adesso che abbiamo introdotto tutti i simboli che useremo e, vagamente, il loro significato, possiamo definire un paio di categorie della sintassi che ci permetteranno di distinguere le formule ben formate da quelle che non lo sono, e di individuare nell'insieme delle formule ben formate un sottoinsieme particolarmente importante: quello degli *enunciati.*

La sintassi della logica dei predicati

Prima di tutto, definiamo le formule atomiche.
Dati dei predicati e dei termini, saranno formule atomiche quelle sequenze di simboli della forma
$P(t)$ se P è unario,
$P(t_1,t_2)$ se P è binario,
…
$P(t_1…t_n)$ se P è n-ario.

(è probabile che ci imbatteremo solo in predicati unari e binari).

Data la definizione delle formule atomiche, possiamo usarla per definire le formule ben formate (*fbf*).

Per una qualunque formula atomica A:

1. A è una *fbf*.
   (tutte le formule atomiche sono ben formate)
2. Per due qualunque *fbf* A e B:
   $(\neg A)$ è una *fbf*.
   $(A \wedge B)$ è una *fbf*.
   $(A \vee B)$ è una *fbf*.

$(A \rightarrow B)$ è una *fbf*.

(tutte le formule ben formate correttamente connesse con i connettivi proposizionali sono anch'esse formule ben formate)

3. Per una qualunque *fbf* A e una variabile x:

   $\forall x(A)$ è una *fbf*.

   $\exists x(A)$ è una *fbf*.

   (la quantificazione di una formula ben formata è anch'essa una formula ben formata)

4. Nient'altro è una formula ben formata.

Partendo da delle formule atomiche, possiamo costruire fbf di varia complessità:

Prendiamo le formule atomiche Fa, Fb, Fx, xRy, aRy. Sappiamo che sono fbf per via di 1.

Allora saranno fbf anche:

- $Fa \rightarrow aRy$ (per la regola 2d)
- $\forall x(Fa \rightarrow aRy)$ (per la regola 3a)
- $\forall x(Fa \rightarrow aRy) \wedge Fx$ (per via della regola 2b)
- $\exists x \forall x(Fa \rightarrow aRy) \wedge Fx$ (per via della regola 3b)
- xRy (atomica)
- $\exists x(xRy)$ (3b)
- $\exists x \exists y(xRy)$ (3b)
- $(\exists x \forall x(Fa \rightarrow aRy) \wedge Fx) \vee \exists x \exists y(xRy)$ (2c)

ESERCIZIO:

Controlla se le seguenti formule sono ben formate, e mostra i passi della formazione se lo sono:

1. G
2. Gx
3. $Fa \rightarrow b$
4. $F(x \wedge y)$
5. $\forall x(Fa)$
6. $\exists x(xRa)$
7. $\exists x \forall x(x \rightarrow y)$

8. $\exists x \forall y (x \rightarrow y)$
9. $\exists x \forall x (Px \rightarrow Py)$

Non tutte le formule ben formate sono uguali. Come vedremo, alcune saranno enunciati, mentre altre no.
Da un punto di vista semantico, gli enunciati saranno esattamente quelle fbf che hanno un valore di verità data un'interpretazione.
Da un punto di vista puramente sintattico, le possiamo distinguere une dalle altre controllando dove e come appaiono le variabili all'interno dell'espressione (e questo sarà il modo più facile per smistarle).

ESERCIZIO
Dato il dominio $U = \{x : x \text{ è } un\ mammifero\}$ e in esso
Le relazioni alle quali abbiamo assegnato un simbolo predicativo P $\mapsto$ essere un unicorno, C $\mapsto$ essere un cane, A $\mapsto$ ama, Q $\mapsto$ ha un cuore;
Gli elementi ai quali abbiamo assegnato una costante individuale s $\mapsto$ Sena,
e $\mapsto$ Elisa, f $\mapsto$ Felix, a $\mapsto$ Alisa r, $\mapsto$ Sara;
Traduci in modo intuitivo le seguenti formule:

1. Cs
2. rAs
3. $\exists x(Cx)$
4. $\exists x(rAx)$
5. $\exists x(Cx \wedge rAx)$
6. $\forall x(Qx)$
7. $\forall x(Cx \rightarrow Qx)$
8. $\forall x(Cx \rightarrow rAx)$

Settimo incontro

Logica dei predicati 3

Gli enunciati e le variabili libere

ESERCIZIO: Scrivi una traduzione delle seguenti formule nel linguaggio naturale.

1. $C(Marco,scarpe)$
2. $\exists x(C(Marco,x))$
3. $\forall x(C(Marco,x) \rightarrow C(Anna,x))$
4. $\forall x(C(Marco,x)) \rightarrow \forall x(C(Anna,x))$
5. $\forall x \exists y(C(x,y))$
6. $\exists x \forall y(C(x,y))$

Come abbiamo detto nel capitolo precedente, non tutte le formule ben formate sono *enunciati*, ovvero non tutte le formule ben formate hanno un valore di verità determinabile.
Gli enunciati saranno esattamente tutte quelle fbf che non contengono variabili libere.
Da un punto di vista semantico, gli enunciati saranno esattamente quelle fbf che hanno un valore di verità data un'interpretazione.
Da un punto di vista puramente sintattico, le possiamo distinguere une dalle altre controllando dove e come appaiono le variabili all'interno dell'espressione (e questo sarà il modo più facile per smistarle).

Se una fbf contiene una o più *variabili libere*, non è un enunciato. Se una fbf non contiene variabili libere, è un enunciato.

Cos'è una variabile libera? È una variabile che non cade sotto il "campo d'azione" di nessun quantificatore. Se una variabile, invece, cade sotto il campo d'azione di un quantificatore, si dice che è *vincolata.*
I simboli che troviamo direttamente dopo il quantificatore non sono variabili vere e proprie, e vengono chiamate «indici del quantificatore» (non tutti i manuali fanno questa distinzione). Non possono mai essere libere in una fbf.
Ogni variabile non vincolata è libera.

Px è una formula ben formata con un'occorrenza di x libera, visto che la variabile non è "legata" a nessun quantificatore, e non è quindi un enunciato. Invece, $\forall x(Px)$ è un enunciato, perché tutte le variabili nella formula sono *vincolate.*

$\forall x(Py)$ è una fbf ma non è un enunciato! La variabile y non è legata a nessun quantificatore ed è quindi libera.

Più precisamente: una variabile cade nel campo d'azione di un quantificatore, ed è quindi vincolata, se soddisfa entrambe le condizioni:
Si trova in una formula sulla quale opera un quantificatore (in altre parole, se si trova nella formula racchiusa nella parentesi direttamente dopo un quantificatore)
È uguale alla variabile che viene dopo uno dei quantificatori che operano sulla formula che la contiene.

Quindi, come abbiamo già detto, nella formula Px, x è libera; non abbiamo soddisfatto nessuna delle due condizioni.
Nella formula $\forall x(xRy)$, x è vincolata, ma y è libera (abbiamo soddisfatto la prima, ma non la seconda condizione per y).
Nella formula $\forall x\forall y(xRy)$, entrambe le variabili sono vincolate.

ESERCIZIO: Trova le variabili libere.

1. $Px\land\neg yRa$
2. $\exists x(xRy)$
3. $\forall x(Px)\rightarrow\exists y(\neg Fx)$
4. $\forall x\exists y(xRa)$
5. $\forall x\exists y(Fy\rightarrow xRy)$
6. $\forall x(Px\rightarrow\exists y(\neg xQy)$
7. $\forall x\exists y(xRy\rightarrow aQx)$
8. $\forall z(Pz\rightarrow\exists y\exists x(Q(x,y,z)\lor Q(z,y,x)))$

9. $\forall z \exists u \exists y (R(u,y) \lor S(u,z,y))$
10. $\forall z \exists x \exists y (R(u,y) \lor S(u,z,y))$

Tornando al fatto che gli enunciati sono le uniche espressioni del linguaggio del primo ordine che hanno un valore di verità, diamo un'occhiata ai nostri esempi.
$\forall x(Px)$ è traducibile come "per ogni x, x è P", che è sinonimo con «tutte le cose sono P». È evidente in base a ciò che abbiamo detto finora che questa espressione sarà vera o falsa (quale dei due dipenderà da quanti elementi del dominio ricadono sotto l'estensione del predicato al quale abbiamo associato P nell'interpretazione).

Invece, prendiamo Px – cosa *significa?* Potremmo leggerlo come "x è P". Questa frase in sé non ha un valore di verità, visto che non è *definito* di quale x parliamo; sostituendo x con un elemento del dominio potrebbe essere vera, sostituendola con un altro potrebbe essere falsa. Per questo motivo, Px non ha un valore di verità, e non ha nemmeno un significato fisso.

Un altro esempio – $\forall x(Py)$ – *cosa significa*? "per ogni x, y è P". Il quantificatore ci dice che quanto segue vale per tutte le x – ma l'espressione alla quale si applica non contiene nessuna occorrenza di x. Py ha un significato analogo a quello di Px, e quindi non abbiamo una frase che ha delle condizioni di verità definite

$\forall x(Px \to Py)$ non è un enunciato, perché contiene una variabile libera (y).

$\forall x \forall y(Px \to Py)$ è un enunciato, perché tutte le occorrenze sia di x che di y sono vincolate.

$\forall x \forall y\ (Px \to Py) \land Px$ non è un enunciato, perché il quantificatore non opera su Px, ma solamente sulla formula racchiusa nelle parentesi! La terza occorrenza di x è quindi libera.

$\forall x \forall y\ ((Px \to Py) \land Px)$ è un enunciato perché tutte le variabili sono vincolate dai due quantificatori.

Esiste anche una definizione precisa ricorsiva di variabile libera:

1) Se A è una formula atomica, x è libera in A sse x occorre in A. (Detto diversamente: non è possibile avere una variabile vincolata in una formula atomica).

2)
   a) x è libera in una formula $\neg$A sse x è libera in A.
   b) x è libera in una formula A$\wedge$B sse x è libera in A o x è libera in B.
   c) x è libera in una formula A$\vee$B sse x è libera in A o x è libera in B.
   d) x è libera in una formula A$\rightarrow$B sse x è libera in A o x è libera in B.

3)
   a) x è libera in $\forall$yA sse x è libera in A e x è un simbolo diverso da y.
   b) x è libera in $\exists$yA sse x è libera in A e x è un simbolo diverso da y.

ESERCIZIO: Controlla se le seguenti formule sono formule ben formate; dopodiché controlla se sono enunciati.

1) aQc
2) aQc$\rightarrow$x
3) Px$\rightarrow$Py
4) $\forall$x$\wedge\exists$y(Fy)
5) $\forall$x(Fx)
6) $\forall$x$\forall$x(Fx)
7) $\exists$x(Fa)
8) $\exists$x(Fa$\wedge$Fx)
9) $\forall$x(Fa$\rightarrow$Fy)
10) $\exists$x$\forall$y(xRy)
11) $\exists$x(Fx$\wedge\forall$y(yRx))
12) $\forall$y(Gy$\rightarrow\forall$x(Fx$\rightarrow$yRx))

Perché è importante distinguere gli enunciati dalle fbf che contengono una variabile libera?

Per noi, sarà importante saper riconoscere gli enunciati perché le frasi del linguaggio naturale che vogliamo tradurre non corrisponderanno mai a una formula del linguaggio formale che contiene una variabile libera.

A differenza dagli enunciati, le fbf che contengono variabili libere non hanno un significato in senso proprio; possono assumere significati diversi in base a sostituzioni diverse, ma non hanno un significato fisso.

Quindi, quando proveremo a tradurre delle frasi dichiarative del linguaggio naturale in quello formale, sapremo che il nostro risultato non potrà contenere nessuna variabile libera.

Ottavo incontro

Logica dei predicati 4

La traduzione in pratica

La parte del linguaggio che riguarda i predicati, le costanti e i connettivi proposizionali non è difficile da tradurre nel linguaggio naturale. Sarà, invece, particolarmente impegnativo tradurre enunciati che contengono quantificatori e variabili.

Come per la traduzione nel linguaggio proposizionale, bisogna sempre stare attenti alla forma e alle condizioni di verità degli enunciati.

La direzione che è più interessante per noi è quella dal linguaggio naturale a quello formale, visto che in tal modo possiamo analizzare il linguaggio naturale e controllare la validità di argomenti. È importante anche saper "leggere" le formule del linguaggio formale in modo intuitivo, ma questo non sarà sempre possibile, data la potenziale enorme complessità degli enunciati.

Uno dei trucchi fondamentali della traduzione dal linguaggio naturale a quello formale è di ricordare che, nella maggior parte dei casi, possiamo seguire questa regola pratica:

Se un enunciato è universale, avrà la forma $\forall x(A \rightarrow B)$;

se è particolare, avrà la forma $\exists x(A \wedge B)$.

Chiaramente non è una regola che è sempre applicabile, ma è utile da tenere in mente.

Possiamo anche analizzare il perché.

Dato un enunciato universale come “tutti gli uomini sono mortali”, possiamo notare che il significato è molto simile a “se una cosa è un uomo, allora è mortale”.
Visto che stiamo parlando di una qualunque cosa, e non di un oggetto in particolare, la traduzione conterrà una variabile; e visto che ha un valore di verità, la variabile dovrà per forza essere vincolata da un quantificatore. Quindi, possiamo leggerla come:

Per ogni cosa, se quella cosa è un uomo, allora è mortale.

$$\forall x \quad (Ux \quad \rightarrow \quad Mx)$$

Quando usiamo “tutti…” nel linguaggio naturale, è raro che vogliamo dire che *tutto ciò che esiste* ha una certa proprietà; è più probabile che vogliamo dire che tutte le cose *di un certo tipo (un sottoinsieme dell’universo determinato da una proprietà)* hanno anche un’altra proprietà. (E non vogliamo dire nulla delle cose che non sono uomini, nel nostro caso! Possono essere o non essere mortali; non è un’informazione contenuta nella frase).
ESERCIZIO: pensate a cosa succede se usiamo una congiunzione; che tipo di enunciato otteniamo?
L’eccezione sarà quando vogliamo veramente parlare di proprietà comuni a tutto ciò che esiste.

Dall’altra parte, dato un enunciato particolare come “alcuni cani sono simpatici”, possiamo notare che non stiamo esprimendo un’implicazione, ma qualcosa di più simile a “esistono delle cose che sono sia cani che simpatiche”. Questa è chiaramente una congiunzione. Possiamo leggerlo come:

Esiste almeno una cosa tale che è un cane ed è anche simpatica.

$$\exists x \quad (Cx \quad \wedge \quad Sx)$$

Quando usiamo “alcuni” o “qualche” nel linguaggio naturale, vogliamo esprimere che esistono degli esempi di una *cosa di un tipo (e che ha quindi la proprietà di essere di quel tipo)* che ha anche un’altra proprietà.
L’eccezione alla regola pratica, in questo caso, sarebbe quando vogliamo esprimere che esiste almeno una cosa con una singola proprietà. (Per esempio, esistono gli unicorni).

Vediamo cosa succederebbe se mettessimo un’implicazione al posto della congiunzione:

$\exists x(Cx \rightarrow Sx)$

Possiamo leggere questa formula come “esiste una cosa tale che, se è un cane, allora è simpatica”. A prima vista non sembra avere un significato molto diverso dalla prima frase; ma le loro condizioni di verità sono diverse, e quindi non possono essere sinonime.

Per esempio, quando diciamo “Alcuni cani sono simpatici”, vogliamo che sia falsa se non esiste nessun cane; mentre $\exists x(Cx \rightarrow Sx)$ sarebbe vera anche se non ci fosse nessun cane. Per questo motivo, $\exists x(Cx \wedge Sx)$ è il candidato migliore per la traduzione di “alcuni cani sono simpatici”, visto che risulta falsa se non esistono cani.

Ricordate che si tratta di una regola pratica e che non è affidabile in tutti i casi; questo è ovvio dato che sia $\exists x(Cx \rightarrow Sx)$ che $\forall x(Cx \wedge Sx)$ sono enunciati perfettamente legali. La ragione che la regola pratica funziona è che è raro che sia utile esprimere questi significati nel linguaggio naturale.

ESERCIZIO: Definisci un’interpretazione e traduci i seguenti enunciati nel linguaggio naturale:

1) $\forall x(Px \rightarrow xQa)$
2) $\forall x(Px \rightarrow Fx)$
3) $\exists x(Px \wedge Fx)$
4) $\exists x(Fx \wedge xQa)$
5) $\exists x(Cx \wedge Px \wedge Fx)$
6) $\exists x(Cx \wedge (Mx \rightarrow Fx))$
7) $\forall x(Px \rightarrow (Fx \vee Cx))$

RISULTATI: Definisci un’interpretazione e traduci i seguenti enunciati nel linguaggio naturale:

1) Tutti i cani amano Anna.
2) Tutti i cani sono pelosi.

3) Esiste un cane peloso.
4) Una cosa pelosa ama Anna.
5) Esiste un cane peloso che morde.
6) Esiste un cane che, se è vecchio, è peloso.
7) Ogni cane è o peloso o morde.

ESERCIZIO: traduci nel linguaggio formale le seguenti frasi:

1) Tutte le ragazze sono distratte.
2) Esiste una ragazza.
3) Esiste una ragazza distratta.
4) Anna è una ragazza.
5) Anna conosce Kant o Hegel (ma non entrambi).
6) Anna conosce Kant e Hegel.
7) Anna non conosce Hegel.
8) Nessuna ragazza conosce Anna.

RISULTATI: traduci nel linguaggio formale le seguenti frasi:

1) $\forall x(Rx \rightarrow Dx)$
2) $\exists x(Rx)$
3) $\exists x(Rx \wedge Dx)$
4) Ra
5) $(C(a,k) \vee C(a,h)) \wedge \neg (C(a,k) \wedge C(a,h))$ (oppure con l'equivalenza)
6) $C(a,k) \wedge C(a,h)$
7) $\neg C(a,h)$
8) $\neg \exists x(Rx \wedge C(x,a))$

ESERCIZIO: traduci nel linguaggio formale le seguenti frasi:

1) I cani hanno quattro zampe.
2) Esiste un uomo moro.

3) Nessun cane vola.
4) Alcuni uccelli non cantano.

RISULTATI: traduci nel linguaggio formale le seguenti frasi:

1) $\forall x(Cx \rightarrow Zx)$
2) $\exists x(Ux \wedge Mx)$
3) $\forall x(Cx \rightarrow \neg Vx)$
4) $\exists x(Bx \wedge \neg Tx)$

L'interdefinibilità dei quantificatori

I due quantificatori sono interdefinibili attraverso l'uso della negazione:

$\forall x(Px) \leftrightarrow \neg \exists x \neg (Px)$

$\exists x(Px) \leftrightarrow \neg \forall x \neg (Px)$

Analizziamo le seguenti equivalenze:

$\forall x(Px) \leftrightarrow \neg \exists x \neg (Px)$

Il lato sinistro significa "Tutto è P"; quello destro "Non esiste nulla che non sia P" – come potete intuire, significano la stessa cosa. ("Tutto è bello" è uguale a "non esistono cose che non sono belle")

$\exists x(Px) \leftrightarrow \neg \forall x \neg (Px)$

Qui, il lato sinistro significa "Esiste almeno una cosa che è P"; quello destro "Non tutte le cose sono non-P" (e quindi ne abbiamo almeno una che è P). Come nel primo caso, abbiamo lo stesso significato espresso in due modi diversi (”Esiste un unicorno” è uguale a “Non è che tutto ciò che esiste è un non-unicorno”).

Un altro modo di notare questa connessione è di mostrarlo negando entrambi i lati della prima equivalenza:

$\neg\forall x(Px)\leftrightarrow\neg\neg\exists x\neg(Px)$

In base alla regola per l’eliminazione della doppia negazione, questo equivale a:

$\neg\forall x(Px)\leftrightarrow\exists x\neg(Px)$

Adesso possiamo leggere i due lati. Il sinistro significa »Non tutte le cose sono P»; il destro «Esiste una cosa che non è P» («Non tutto è bello» è come dire «Esiste qualcosa che non è bello»)

Negando nello stesso modo la seconda equivalenza otteniamo:

$\neg\exists x(Px)\leftrightarrow\neg\neg\forall x\neg(Px)$

In base alla regola per l’eliminazione della doppia negazione, questo equivale a:

$\neg\exists x(Px)\leftrightarrow\forall x\neg(Px)$

Adesso possiamo leggere i due lati. Il sinistro significa »Non esiste un P»; il destro «Tutte le cose sono non-P» (dire «Non esiste un unicorno» è come dire «Tutte le cose sono non-unicorni» o anche «Niente è un unicorno»).

Nono incontro

Logica dei predicati 5

La traduzione di formule con più quantificatori

Gli enunciati più interessanti del linguaggio formale conterranno più quantificatori combinati. L'ordine dei quantificatori sarà importante se sono diversi.

Quando abbiamo più quantificatori dello stesso tipo, l'ordine nel quale appaiono i quantificatori non è importante. Per esempio,

$\exists x \exists y (xAy)$

Significa «Esiste qualcuno che ama qualcuno» (Esiste una x tale che esiste una y che x ama); scambiando i quantificatori, otteniamo

$\exists y \exists x (xAy)$

Che significa la stessa cosa (Esiste una y tale che esiste una x che lo ama) – le condizioni di verità sono le stesse.

Perché l'ordine importa se i quantificatori sono diversi?

Leggi i seguenti due enunciati, dove A significa «…ama…» e l'universo consiste di persone:

$\exists x \forall y (xAy)$

$\forall y \exists x (xAy)$

Il primo significa «Esiste qualcuno che ama tutti» (letto letteralmente, «Esiste qualche persona x tale che, per ogni persona y che prendiamo, x ama y);

il secondo significa «Tutti sono amati da qualcuno» («Per ogni persona y, esiste un x tale che x ama y»)

Avevamo scambiato solo l'ordine dei quantificatori, ma cambiando anche le variabili otteniamo nuovi significati:

$\exists y \forall x (xAy)$

$\forall x \exists y(xAy)$

Il terzo enunciato significa «Esiste qualcuno che è amato da tutti» (letteralmente «Esiste una y tale che, per ogni x che prendiamo, x ama y»)
e il quarto significa «Tutti amano qualcuno» (Per ogni x che prendiamo, esiste almeno una y tale che x ama y»)

Ognuna di queste quattro frasi significa una cosa diversa (ha delle condizioni di verità diverse). Per questo, bisogna stare attenti all'ordine dei quantificatori quando essi sono combinati fra di loro.

Prendiamo come esempio una frase che dovrà chiaramente essere tradotta usando più quantificatori, come »Alcune persone amano tutti i bambini». (Sappiamo che questa è una frase con più quantificatori perché esprime sia «alcune cose…» che «tutte le cose…»)
Proviamo a analizzare la nostra frase per capire qual è la sua struttura.

Alcune persone amano tutti i bambini.

Prima di tutto, possiamo notare che si tratta di una frase *particolare;* ci dice che esiste almeno una persona che ha una certa proprietà. Possiamo leggerla come:

Esiste almeno una persona tale che essa ama tutti i bambini.

E quindi, avrà questa forma:

$\exists$x(x è una persona e x ama tutti i bambini)

(nota che abbiamo utilizzato «e» e quindi una congiunzione, per via di quello che abbiamo detto la volta scorsa riguardo la forma degli enunciati esistenziali!)

Adesso possiamo formalizzare anche la parte interna dell'enunciato, che dovrà contenere un quantificatore universale, dato che parla di tutte le cose che sono bambini:

∃x(x è una persona e, per ogni cosa che è un bambino, x la ama)

Ovvero:

∃x(x è una persona e ∀y(se y è un bambino, x ama y))

Formalizzando ulteriormente, data la lettera predicativa P per «è una persona», B per «è un bambino» e A per «…ama…»:

$\exists x(Px \land \forall y(By \rightarrow xAy))$

(Esiste un modo alternativo di scrivere questa formula «tirando fuori» il quantificatore esterno; non ne parleremo in questo laboratorio)

Per iniziare, la traduzione fatta in questa maniera – gradualmente, pezzo per pezzo – è il miglior modo per evitare errori.

ESERCIZIO: Qual è la migliore traduzione della seguente formula?

"Esiste una stanza nella quale nessuno è entrato."

1) $\exists x(Stanza(x) \land \forall y(\neg Persona(y) \land \neg Entra(y,x)))$
2) $\exists x(Stanza(x) \rightarrow \forall y(Persona(y) \rightarrow \neg Entra(y,x)))$
3) $\exists x(Stanza(x) \land \forall y(Persona(y) \rightarrow \neg Entra(y,x)))$

ESERCIZIO: Usando la seguente interpretazione, traduci gli enunciati nel linguaggio del primo ordine.

R=…è una ragazza L=…è un libro R=…legge… A=…apprezza…

1) Le ragazze che apprezzano tutti i libri non apprezzano sé stesse.

2) Un libro che viene letto da tutte le ragazze è apprezzato da tutte le ragazze.
3) Nessun libro viene letto da tutte le ragazze.
4) Esistono ragazze che leggono solo libri apprezzati da tutte le ragazze.
5) Se una ragazza apprezza le ragazze che leggono i libri, allora apprezza i libri.

Proviamo a risolvere uno di questi esercizi passo per passo:

Le ragazze che apprezzano tutti i libri non apprezzano sé stesse.

Qui stiamo dicendo qualcosa che vale in generale per tutte le ragazze, e quindi la forma dell'enunciato sarà universale:

(Tutte) Le ragazze che apprezzano tutti i libri non apprezzano sé stesse.

Introduciamo il quantificatore universale:

∀x(se x è una ragazza che apprezza tutti i libri, allora x non apprezza sé stessa).

Qui possiamo notare che la frase quantificata è un'implicazione:

∀x(x è una ragazza che apprezza tutti i libri → x non apprezza sé stessa).

L'antecedente, «x è una ragazza che apprezza tutti i libri», vuol dire «x è una ragazza e per ogni cosa che è un libro, x la apprezza»:

∀x((x è una ragazza e ∀y(se y è un libro, x apprezza y)) → x non apprezza sé stessa).

Il conseguente può essere riformulato come segue:

∀x((x è una ragazza e ∀y(se y è un libro, x apprezza y)) → x non apprezza x).

Sostituiamo i connettivi proposizionali:

$\forall x$((x è una ragazza $\wedge$ $\forall y$(y è un libro $\rightarrow$ x apprezza y)) $\rightarrow$ $\neg$(x apprezza x)).

Adesso manca solo la sostituzione dei simboli predicativi:

$\forall x((Rx \wedge \forall y(Lx \rightarrow xAy)) \rightarrow \neg(xAx))$.

Decimo incontro

Logica dei predicati 6

L'identità e le descrizioni definite

Quando abbiamo introdotto il vocabolario del linguaggio del primo ordine abbiamo incluso il simbolo «=», ma non l'abbiamo ancora usato, né abbiamo spiegato come va scritto in modo corretto (non lo abbiamo incluso nelle regole di formazione).
Oggi chiariremo il significato e alcuni dei possibili usi di questo simbolo.

Che cos'è l'identità?

Nel linguaggio naturale, la parola «identità» ha molti significati; può significare la somiglianza fra due cose («il padre e il figlio sono identici»), oppure ciò che rende una persona un *individuo* («ha provato la sua identità con un documento»), oppure la totale coincidenza fra due cose («l'uomo che ho incontrato ieri è la stessa identica persona che mi ha fatto il colloquio oggi») Solo l'ultimo significato corrisponde all'identità logica.

L'identità logica viene chiamata anche "identità numerica", e significa la totale coincidenza fra due oggetti. Per esempio, dire "Clark Kent e Superman sono identici" vuol dire che le due cose delle quali stiamo parlando sono, in verità, la stessa entità. Questo tipo di identità

viene chiamata numerica perché contrasta l'identità *qualitativa*, ovvero l'uguaglianza fra le qualità di due cose distinte.
Quindi, quando scrivo a=b, sto esprimendo che a e b stanno per la stessa cosa; si riferiscono a un unico oggetto.

L'identità è una relazione che sussiste esclusivamente fra oggetti, e non fra predicati o formule. Quindi, P(x)=Q(x) non sarà una formula ben formata; né lo sarà $\forall$x(Px) = $\exists$x$\neg$(Px).

Quindi, l'identità non è nient'altro che una relazione fra oggetti; è molto simile agli altri predicati a due posti che abbiamo usato, ma ha delle proprietà logiche particolari che la rendono importante ed ha quindi un simbolo dedicato.
Visto che possiamo trattare l'identità come ogni altro predicato a due posti, non c'è bisogno di modificare le regole di formazione per le formule ben formate; daremo comunque degli esempi di fbf contenenti l'identità.
Date le regole della sintassi:
Prese delle variabili *x*, *y*, *z* o delle costanti individuali *a*, *b*, *c* e (il predicato a due posti) = :
x = *y*
x = *a*
a = *b*
Sono formule atomiche (e quindi anche fbf).

Quando ci sarà utile questo predicato? Possiamo usarlo per:
1) Esprimere che un predicato binario sussiste fra cose diverse;
2) Esprimere che esattamente *n* cose hanno delle proprietà;
3) Esprimere una descrizione definita.

1. Esprimere che un predicato binario sussiste fra cose diverse

Prendiamo la frase «Ogni persona ama qualche altra persona». Traducendola otteniamo:

$\forall$x(Px$\rightarrow\exists$y(Py$\wedge$xAy))

Possiamo leggere questa formula come «Per ogni cosa x che è una persona, esiste una cosa y che è una persona e x ama y».
Questa sembra una buona traduzione, ma non lo è; controlliamo il perché.

Ogni persona ama qualche altra persona.

Questa frase dice che non esiste una persona che non ama un'altra persona. Questa frase risulterebbe falsa se esistessero delle persone che amano solo sé stesse.

$\forall x(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge xAy))$

La nostra traduzione, invece, sarebbe vera anche se esistessero persone che amano solo sé stesse; infatti, per quelle persone x è vero che esiste una y tale che è una persona e x ama y; solo che in questo caso x e y coincidono!
Visto che hanno condizioni di verità diverse, questi due enunciati non significano la stessa cosa.

Come facciamo a tradurre correttamente l'esempio?
Come potete intuire, useremo l'identità. Possiamo semplicemente negare l'identità fra x e y:
$\forall x(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge \neg(x=y) \wedge xAy))$
Possiamo leggere questo enunciato come: "Per ogni persona x, esiste una persona y diversa da x tale che x ama y". Questa formula ha le stesse condizioni di verità come "Ogni persona ama qualche altra persona" ed è una traduzione adeguata di questa frase.

2. Esprimere che esattamente *n* cose hanno delle proprietà

Uno dei vantaggi dell'identità è che ci permette di esprimere che esiste esattamente una cosa che ha una certa proprietà, oppure esattamente due cose, etc.
Noi affronteremo solamente esempi di frasi che esprimono l'esistenza di esattamente una cosa.
Partiamo da un esempio semplice:

Esiste esattamente una regina dell'Inghilterra.

Possiamo pensare che la sua traduzione sia:

$\exists x(Rx)$

Che leggiamo come «Esiste una cosa che è regina dell'Inghilterra»; ma questa formula rimane vera anche in un mondo con più regine dell'Inghilterra, e non è quindi una buona traduzione della frase italiana.
Per esprimere che esiste esattamente un'entità con questa proprietà, dobbiamo espandere la formula:

$\exists x(Rx \land \forall y(Ry \rightarrow (x=y)))$

Possiamo leggere questa formula come «Esiste almeno una cosa x che è la regina dell'Inghilterra, e per qualunque altra cosa y che prendiamo, se quella cosa è la regina dell'Inghilterra, allora x e y sono la stessa cosa».

Possiamo immaginare il nostro universo come un grande contenitore pieno di svariate biglie con diverse proprietà scritte sopra (le biglie sono i nostri oggetti).
Dire che $\exists x(Rx)$ vuol dire che, guardando le biglie una per una, prima o poi mi imbatterò in una biglia che ha la proprietà di essere la regina dell'Inghilterra. Chiaramente, possono esserci anche più biglie con questa proprietà.

Il significato di $\exists x(Rx \land \forall y(Ry \rightarrow (x=y)))$ è più complesso, ma possiamo dividerlo in due parti. La prima parte è uguale all'esempio precedente; tirando fuori le biglie una per una, prima o poi una delle biglie sarà la regina dell'Inghilterra.
La seconda parte, invece, significa che, se prendo una biglia a caso dal contenitore e vedo che si tratta della regina dell'Inghilterra (e poi la rimetto indietro), posso assumere che è la stessa biglia di prima; e questo vale per tutte le estrazioni che potrei fare.

Possiamo anche pensare all'esempio delle biglie *al contrario*:

immaginate che ci sia un contenitore pieno di biglie e che una sola delle biglie sia la regina dell'Inghilterra. Se prendete una biglia a caso e vedete che è la regina dell'Inghilterra, la mettete indietro, e riprendete una biglia dal contenitore, se la «nuova» biglia è la regina dell'Inghilterra, è chiaro che potete razionalmente assumere che si tratta dello stesso oggetto che avevate tirato fuori prima.

Prendiamo una frase diversa:
Elisa ha comprato una casa.
Possiamo provare a tradurla:
$\exists x(Cx \wedge ePx)$

(Dove C sta per «essere una casa», P sta per «ha comprato» e *e* è la costante individuale che denota Elisa).
Questa traduzione non è sbagliata, ma permette che Elisa abbia comprato due (o anche cento) case. È probabile che la frase nel linguaggio naturale significhi, implicitamente, che Elisa abbia comprato <u>esattamente</u> una casa; e per esprimere questo significato, possiamo usare l'identità.

$\exists x(Cx \wedge ePx)$

Possiamo leggere questa formula come «Esiste almeno una casa x tale che Elisa ha comprato x».
Per evitare che risulti vera anche se Elisa ha comprato più case, possiamo estendere la formula:

$\exists x(Cx \wedge ePx \wedge \forall y((Cy \wedge ePy) \rightarrow (x=y)))$

Questo vuol dire che esiste una casa x che Elisa ha comprato, e per ogni altra cosa y che è una casa e che Elisa ha comprato, x e y sono la stessa cosa.

3. Esprimere una descrizione definita

Le descrizioni definite sono espressioni che vogliono riferirsi a un singolo oggetto; quindi «l'imperatrice d'Italia», »la montagna più alta del mondo», «il padre di Aristotele» sono tutti esempi di descrizioni definite. Alcune di queste descrizioni non denotano nessun oggetto (l'Italia non è un impero), ma è chiaro che si tratta di espressioni che tendono a individuare un singolo oggetto, anche se questo non esiste.

Le descrizioni definite sono contrastate da quelle *indefinite*, come «un uomo», «una regina» etc. Entrambi questi tipi di espressioni possono stare al posto del soggetto in una frase.

Possiamo dire:

«L'imperatrice d'Italia è crudele»

E:

«Un uomo è gentile»;

Sia «L'imperatrice d'Italia» che «Un uomo» stanno al posto del soggetto, ma hanno una forma diversa, visto che la prima espressione implica che esiste esattamente un'entità che è l'imperatrice d'Italia.

Quindi, la traduzione delle due frasi sarà diversa. La prima sarà:

Un uomo è gentile.

$\exists x(Ux \land Gx)$

La seconda, invece, avrà una forma simile alle formule che abbiamo visto nella sezione prima, dato che vogliamo individuare un'entità unica, l'imperatrice d'Italia:

L'imperatrice d'Italia è crudele.

$\exists x(Ix \land Cx \land \forall y(Ix \rightarrow (x=y)))$

Possiamo leggere questa formula come «Esiste una cosa x che è sia un'imperatrice d'Italia che crudele, e per ogni altra cosa y che è un'imperatrice d'Italia, x e y sono lo stesso oggetto.

L'idea che espressioni come «il re di Francia» o «il miglior giocatore di calcio del mondo» abbiano questa forma è stata usata per tentare di risolvere alcuni problemi della filosofia del linguaggio.

Per esempio, un problema famoso riguarda il valore di verità di alcuni enunciati che contengono riferimenti a non-esistenti.
Dato il principio del terzo escluso, dati i due enunciati A e $\neg$A, uno dei due deve essere vero. Ma se prendiamo i due enunciati:

Il re di Francia è calvo.
Il re di Francia non è calvo.

Nessuno dei due sembra essere vero! Com'è possibile?
Proviamo a tradurre i due enunciati nel linguaggio formale.

Il re di Francia è calvo.

Questo vuol dire che esiste una cosa che è (l'unico) re di Francia ed è calva:

$\exists x(Rx \wedge Cx \wedge \forall y(Ry \rightarrow (x=y)))$

Possiamo leggere questa formula come «Esiste una cosa tale che è (l'unico) re di Francia ed è calva». Visto che la Francia non ha un re, questo enunciato deve per forza essere falso.

Prendiamo il secondo enunciato, che è il più problematico.

Il re di Francia non è calvo.

Come possiamo formalizzarlo? Russell nota che abbiamo due possibilità, che vuol dire che l'enunciato è ambiguo.
Una è di dire che esiste una cosa che è il re di Francia, e che questa cosa non è calva:

$\exists x(Rx \wedge \neg Cx \wedge \forall y(Ry \rightarrow (x=y)))$

Qui stiamo dicendo che esiste una cosa che è (l'unico) re di Francia e che questa cosa non è calva; questo enunciato è falso, ma non è la negazione del primo!

Il secondo modo di interpretare l'enunciato è di dire che significa che non esiste una cosa che è il re di Francia ed è calva:

Il re di Francia non è calvo.

$\neg\exists x(Rx \wedge Cx \wedge \forall y(Ry \rightarrow (x=y)))$

Questo vuol dire «non esiste una cosa che è (l'unico) re di Francia ed è calva». Questo enunciato è vero, ed è la vera e propria negazione del primo:

Il re di Francia è calvo.

$\exists x(Rx \wedge Cx \wedge \forall y(Ry \rightarrow (x=y)))$

Data questa analisi della forma delle descrizioni definite, Russell ha risolto il problema – lo status apparentemente indeterminato del valore di verità dei due enunciati.